

Stappenplan: verrassingen ontdekken in een driehoek (de driehoek van Pascal)

Materiaal

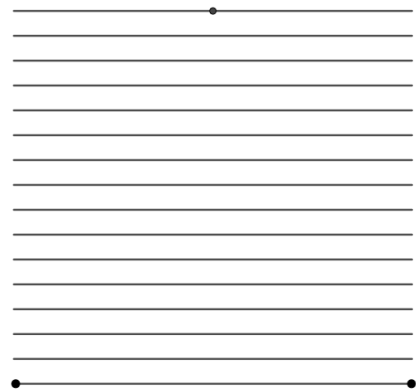
- * 1 potlood (gom en slijper)
- * kleurpotloden
- * 1 geodriehoek
- * 1 blad kladpapier A4
- * 1 x bijlage 1 (je kan deel 1 van het stappenplan overslaan en starten vanaf deel 2 met bijlage 2)

Stappen

Deel 1: Een driehoekig stippelpatroon tekenen

STAP 1: *bijlage 1 (bovenste helft van het blad) – potlood – geodriehoek*

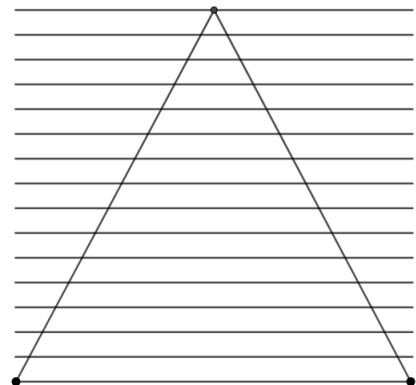
- * Zet een stip in het midden van het bovenste lijnstuk.
- * Zet een stip op beide uiteinden van het onderste lijnstuk.



STAP 2:

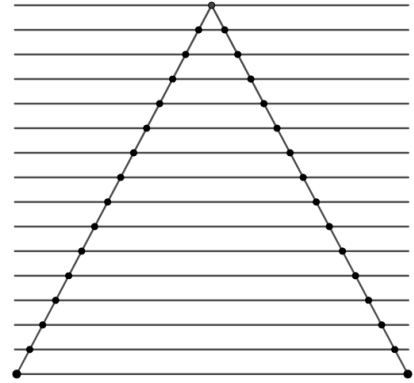
Teken de 2 lijnstukken die de stip van het bovenste lijnstuk met de stippen van het onderste lijnstuk verbinden.

De 3 stippen zijn de hoekpunten van een gelijkbenige driehoek.



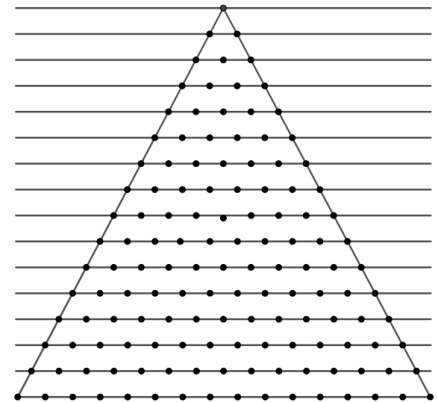
STAP 3:

Plaats telkens een stip op de plaats waar de 2 lijnstukken de horizontale lijnstukken snijden.

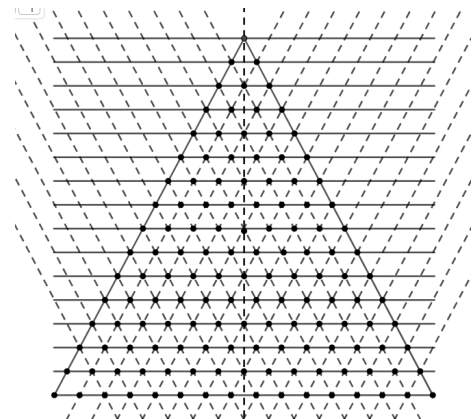


STAP 4:

Plaats binnen de driehoek en op de horizontale lijnstukken, stippen op gelijke afstand van elkaar zodat er
op het 3^{de} lijnstuk in het totaal 3 stippen staan,
op het 4^{de} lijnstuk in het totaal 4 stippen staan,
op het 5^{de} lijnstuk in het totaal 5 stippen staan, enz.
tot er op het 16^{de} lijnstuk in het totaal 16 stippen staan.



TIP: Het tekenen van gestippelde rechten kan helpen om de stippen op een gelijke afstand van elkaar te tekenen.



Deel 2: Getallen bij de stippen schrijven (boven de stip!)

STAP 5:

Schrijf bij de stip aan het begin en het eind van elk lijnstuk het getal 1.

STAP 6:

Bekijk de middelste stip op het 3^{de} lijnstuk.

Schrijf hierbij de som van de 2 getallen die bij de stippen op het lijnstuk erboven staan, dus 2.

STAP 7:

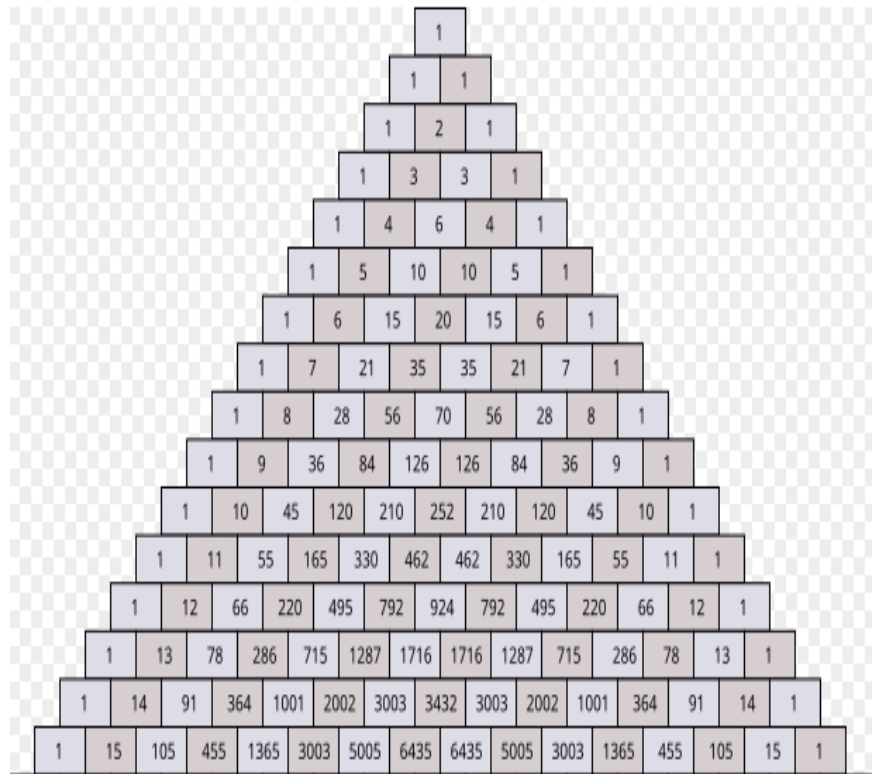
Ga naar het lijnstuk er onder.

Schrijf bij elke stip de som van de 2 getallen die bij de stippen op het lijnstuk erboven staan en het dichtst bij die stip staan.

STAP 8:

Herhaal stap 7 tot bij alle stippen een getal geschreven is.

*Je krijgt dan het volgende schema van getallen. Dit wordt **de driehoek van Pascal** genoemd.*



Deel 3: 4 verrassingen ontdekken in de driehoek van Pascal

Voor elke rij geldt: de getallen die je van links naar rechts leest, zijn dezelfde als de getallen die je van rechts naar links leest. (→ **verrassing 1**)

STAP 9:

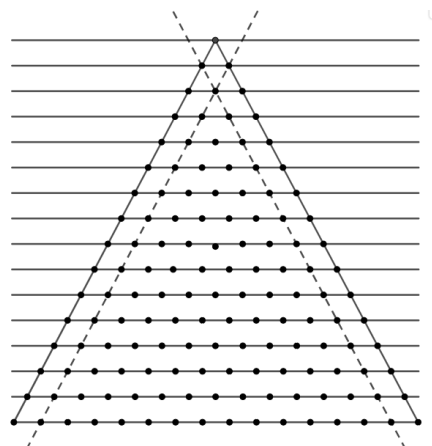
Start vanaf de bovenste rij getallen en schrijf naast elke rij de som van de getallen.
Wat merk je op? (→ **verrassing 2**)

STAP 10: *kleurpotlood (kleur 1)*

Teken het lijnstuk dat de beginstip van het 2^{de} lijnstuk verbindt met de voorlaatste stip van het 16^{de} lijnstuk.

Teken het lijnstuk dat het eindstip van het 2^{de} lijnstuk verbindt met de 2^{de} stip van het 16^{de} lijnstuk.

Welke getallen staan bij de stippen van die gekleurde lijnstukken?
(→ **verrassing 3**)



STAP 11: *Kleurpotlood (kleur 2)*

Hoeveel stippen staan er op het 1^{ste} lijnstuk?

Hoeveel stippen staan er op de 2 bovenste lijnstukken samen?

Hoeveel stippen staan er op de 3 bovenste lijnstukken samen?

Hoeveel stippen staan er op de 4 bovenste lijnstukken samen?

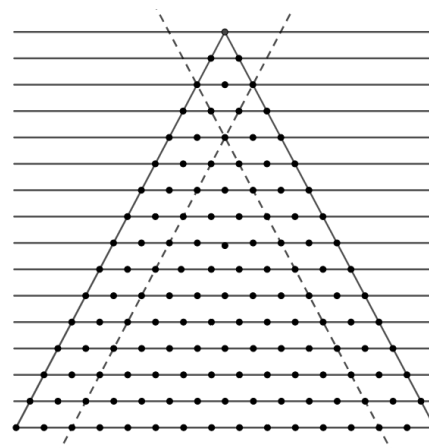
Schrijf de antwoorden hier na elkaar:, ...,,

Deze rij getallen noemt men de rij van de driehoeksgetallen.

Teken het lijnstuk dat de 1^{ste} stip van het 3^{de} lijnstuk verbindt met de 3^{de} laatste stip van het 16^{de} lijnstuk.

Teken het lijnstuk dat de laatste stip van het 3^{de} lijnstuk verbindt met de 3^{de} stip van het 16^{de} lijnstuk.

Welke getallen staan bij de stippen van die gekleurde lijnstukken?
(→ **verrassing 4**)



UITBREIDING 1: Nog 2 verrassingen in de driehoek van Pascal (als het begrip priemgetal en machten gekend is, ...).

STAP 12:

Zoek in de driehoek van Pascal naar een rij waarvan het 2^{de} getal een priemgetal is. Bekijk de andere getallen van die rij tot aan het voorlaatste getal. Wat merk je op?

..... (→ **verrassing 5**)

STAP 13:

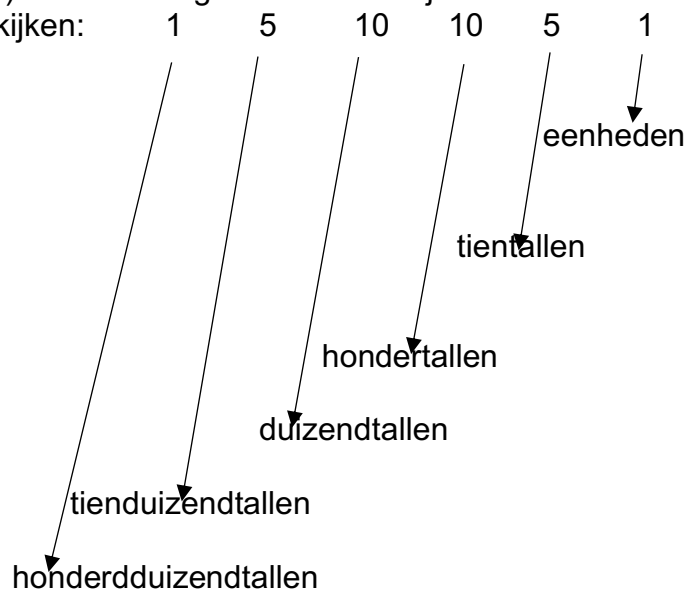
Tot en met de 5^{de} rij staan er in de driehoek van Pascal getallen met 1 cijfer. Schrijf naast elk van deze rijen het getal dat bestaat uit de cijfers van die rij. Bijv. voor de 3^{de} rij is dit het getal 121.

Als je die 5 getallen bekijkt: wat valt je op? (→ **verrassing 6**)

STAP 14:

In de 6^{de} rij (1, 5, 10, 10, 5, 1) staan er nu getallen met 2 cijfers.

Als we die rij nu als volgt bekijken:



en we maken de volgende som:

1
50
1000
10000
50000
100000
TOTAAL
161051

Schrijf 161 051 naast de 6^{de} rij. Dit getal voldoet terug aan de eigenschap die we al ontdekten.

Welk getal komt er naast de 7^{de} rij te staan?

Controleer of die eigenschap nog altijd geldig is.

Je kan bovenstaande techniek ook voor de volgende rijen gebruiken en nagaan dat de eigenschap blijft gelden. (→ **verrassing 6**)

UITBREIDING 2: nog een verrassing in de driehoek van Pascal (als **de driehoek van Sierpinsky** gekend is)

Als je deze driehoek niet kent, dan kan je vanaf blz. 8 een stappenplan volgen om een driehoek van Sierpinsky te leren tekenen.

STAP 15: *kleurpotlood (kleur 3)*

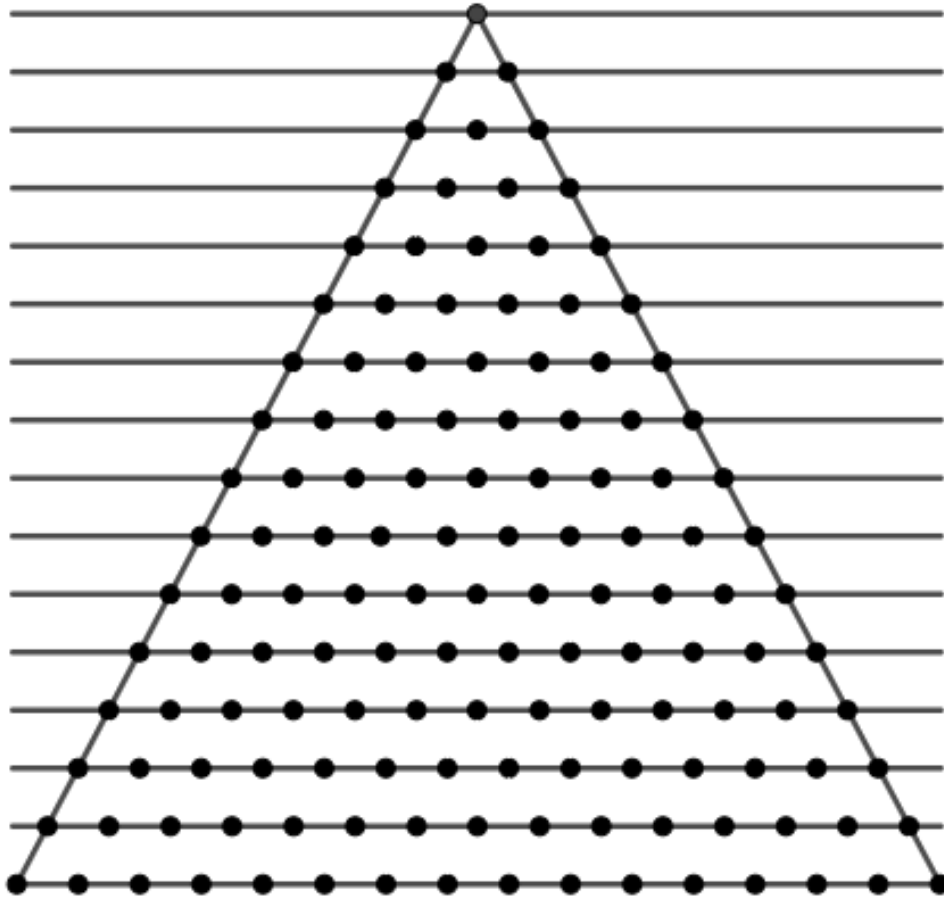
Kleur in de driehoek van Pascal alle stippen waarbij een oneven getal staat. Wat merk je op? (→ **verrassing 7**)

BIJLAGE 1: 16 en 17 horizontale lijnstukken

De driehoek van Pascal

De driehoek van Sierpinsky

BIJLAGE 2: Een driehoekig stippelpatroon (= de startfiguur driehoek van Pascal)



BIJLAGE 3: **Een driehoek van Sierpinsky tekenen**

Materiaal

- * 1 potlood (slijper)
- * 1 gom
- * 1 geodriehoek
- * 1 blad kladpapier A4
- * 1 x bijlage 1

Stappen

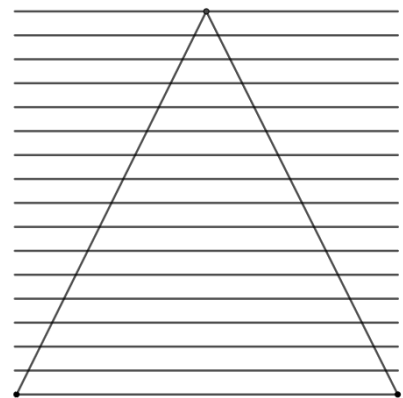
STAP 1: *bijlage 1 (onderste helft van het blad) - potlood – geodriehoek*

- * Zet een stip in het midden van het bovenste lijnstuk.
- * Zet een stip op beide uiteinden van het onderste lijnstuk.

STAP 2:

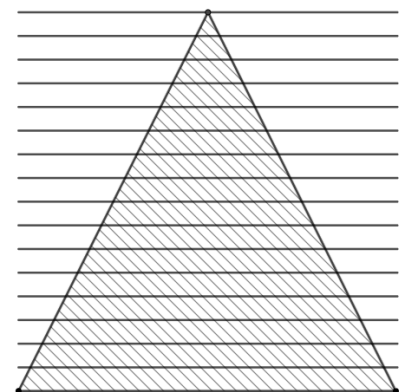
Teken de 2 lijnstukken die de stip van het bovenste lijnstuk met de stippen van het onderste lijnstuk verbinden.

De 3 stippen zijn de hoekpunten van een gelijkbenige driehoek.



STAP 3:

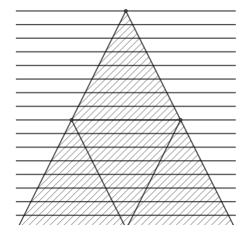
Arceer licht het oppervlak van de driehoek.



STAP 4:

- * Bepaal het midden van elke zijde en verbind ze met een lijnstuk.

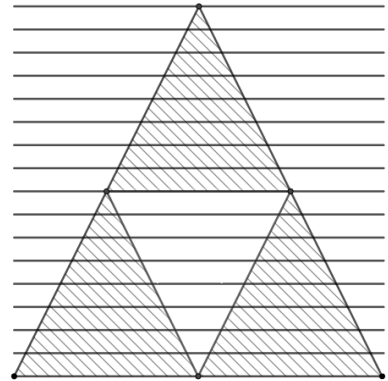
De oorspronkelijke driehoek is nu verdeeld in 4 congruente driehoeken.



STAP 5: *gom*

Veeg de arcering van de middelste driehoek weg.

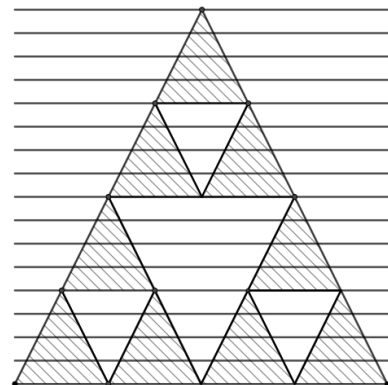
De startfiguur is nu gewijzigd naar een figuur met 3 congruente driehoeken.



STAP 6:

Bepaal het midden van elke zijde en verbind ze met een lijnstuk.

De driehoeken worden dus terug verdeeld in 4 congruente driehoeken.



STAP 7:

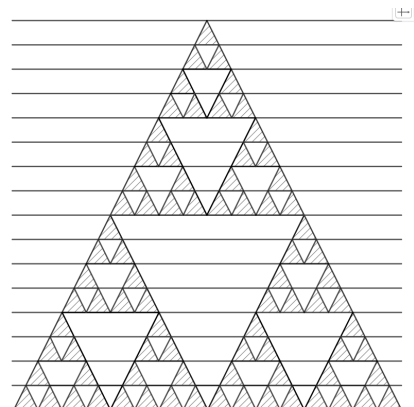
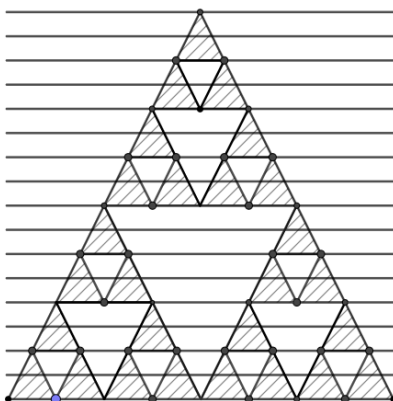
Veeg de arcering van elke middelste driehoek weg.

De figuur is nu gewijzigd naar een figuur met 9 congruente driehoeken.

Bij het tekenen van de driehoek van Sierpinsky worden stappen 6 en 7 steeds herhaald.

Zo bekom je achtereenvolgens:

een figuur met 27 congruente driehoeken een figuur met 81 congruente driehoeken



en zo verder... Om de 7^{de} verrassing in de driehoek van Pascal te ontdekken, stop je bij de figuur met 81 congruente driehoeken.

BIJLAGE 4: Antwoorden bij verrassingen ontdekken

Verrassing 2:

$1+1=2$, $2+2=4$, $4+4=8$, ...

of: $1 \times 2=2$, $2 \times 2=4$, $4 \times 2=8$, ...

of: het zijn opeenvolgende machten van 2: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$, ...

of: het is een meetkundige rij met beginterm 1 en quotiënt 2.

In de antwoorden bij de volgende vragen worden die verschillende mogelijke antwoorden niet beschreven maar het is evengoed mogelijk om het antwoord aan te passen.

Verrassing 3: Dit is de rij van de natuurlijke getallen.

Verrassing 4: Dit is de rij van de driehoeksgetallen.

UITBREIDING 1

Verrassing 5:

Bijv. bij de 8^{ste} rij is het 2^{de} getal: 7; Alle andere getallen, behalve het laatste getal, is een veelvoud van 7.

Bijv. bij de 12^{de} rij is het 2^{de} getal: 11; Alle andere getallen, behalve het laatste getal, is een veelvoud van 11.

Verrassing 6:

Elk getal is een veelvoud van 11.

UITBREIDING 2

Verrassing 7: De gekleurde stippen vormen een driehoek van Sierpinsky.

